BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a VI-a

1. **a)** Arătați că numărul $n=\overline{abcd}+\overline{bcda}+\overline{cdab}+\overline{dabc}$ este divizibil cu 101.

b) Demonstrați că dacă $\overline{abcd}$ este divizibil cu 101, atunci fiecare din numerele $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$ și respectiv $\overline{dabc}$ este divizibil cu 101.

Soluție și barem:

OFICIU	**1p**
a) Avem $n=1111\cdot(a+b+c+d)=101\cdot 11\cdot(a+b+c+d)$, deci $n\vdots 101$.	**2p**
b) $\overline{abcd}+111\cdot\overline{bcda}=1000\cdot a+\overline{bcd}+111\cdot\left(10\cdot\overline{bcd}+a\right)=1111\cdot a+1111\cdot\overline{bcd}=1111\cdot\left(a+\overline{bcd}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow 111\cdot\overline{bcda}=1111\cdot\left(a+\overline{bcd}\right)-\overline{abcd}$	**4p**
Cum $\overline{abcd}\vdots 101$ și $1111\cdot\left(a+\overline{bcd}\right)\vdots 101$, obținem de aici că $111\cdot\overline{bcda}\vdots 101$ și deoarece 111 și 101 sunt prime între ele, rezultă în final că $\overline{bcda}\vdots 101$. Analog se arată și pentru celelalte trei numere.	**3p**

2. Pe dreapta d se consideră punctele A, O și F, în această ordine. În același semiplan mărginit de dreapta d se consideră unghiurile proprii $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOF$, astfel încât oricare două dintre ele să aibă interioarele disjuncte și măsurile lor să fie exprimate prin numere naturale care sunt pătrate perfecte, distincte. Demonstrați că două dintre cele cinci unghiuri sunt complementare.

Soluție și barem:

OFICIU	**1p**
Fie $m(\sphericalangle AOB)=a^2$, $m(\sphericalangle BOC)=b^2$, $m(\sphericalangle COD)=c^2$, $m(\sphericalangle DOE)=d^2$, $m(\sphericalangle EOF)=e^2$, unde $a,b,c,d,e\in\mathbb{N}^*$ sunt distincte și verifică relația $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=180$. Este evident faptul că numărul de numere impare trebuie să fie par și în plus acesta nu poate fi egal cu 2, căci în caz contrar (cum pătratul unui număr impar este congruent cu 1 (mod 4), iar pătratul unui număr par este congruent cu 0 (mod 4), s-ar obține că membrul stâng este congruent cu 2 (mod 4), fals câtă vreme 180 este congruent cu 0 (mod 4)). Deci numărul de numere impare este egal cu 0 sau 4.	**2p**
Nu putem avea 0 numere impare, deci toate cele 5 să fie pare, deoarece suma pătrătelor celor mai mici 5 numere pare distincte și nenule este $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2=220$, prin urmare mai mare decât 180.	**1p**
Așadar avem patru numere impare si unul par; fie de exemplu $a<b<c<d$ impare și e număr par. Deci $e^2\geq 2^2=4\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\leq 176$; în plus din $a<b<c<d$, impare, rezultă $a+6\leq b+4\leq c+2\leq d$, adică $a^2+b^2+c^2+d^2\geq a^2+(a+2)^2+(a+4)^2+(a+6)^2$, unde a este impar. Așadar $a^2+(a+2)^2+(a+4)^2+(a+6)^2\leq 176$, deci $a\in\{1;3\}$.	**4p**
Pentru $a=1$ obținem soluția $(a;b;c;d;e)=\{(1;3;5;9;8)\}$, adică avem descompunerea $1^2+3^2+5^2+9^2+8^2=180$ și deci $b^2+d^2=3^2+9^2=90$. Pentru $a=3$ obținem soluția $(a;b;c;d;e)=(3;5;7;9;4)$, adică avem descompunerea $3^2+5^2+7^2+9^2+4^2=180$ și deci $a^2+d^2=3^2+9^2=90$.	**1p**

3. Câte numere de 2016 cifre îndeplinesc simultan următoarele două proprietăți:

a) toate cifrele din scrierea numărului sunt numere prime;

b) suma a oricare trei cifre consecutive din scrierea numărului este tot un număr prim?

Soluție și barem:

OFICIU	**1p**
Numerele căutate pot avea următoarele forme: $\overline{22a_1 22a_2 \ldots 22a_{672}}$, unde $a_i \in \{3;7\}$, sau $\overline{2a_1 22a_2 2 \ldots 2a_{672} 2}$, unde $a_i \in \{3;7\}$, sau $\overline{a_1 22a_2 22 \ldots a_{672} 22}$, unde $a_i \in \{3;7\}$ sau $\overline{b_1 b_2 \ldots b_{2016}}$, unde $b_i \in \{3;5;7\}$.	**3p**
Din fiecare din primele trei forme avem câte 2^{672} numere.	**1p**
Cu toate cifrele impare avem $3 \cdot 3 \cdot 2^{2014}$ numere, pentru că primele două cifre pot fi alese arbitrar, apoi avem cîte două variante: după 3, 3 poate urma 5 sau 7, dar nu și 3 (11 și 13 sunt prime, dar 9 nu este prim), după 3, 5 poate urma 3 sau 5, dar nu 7 (11 și 13 sunt prime, dar 15 nu), după 3, 7 poate urma 3 sau 7, dar nu 5 (13 și 17 prime, dar 15 compus), după 5, 5 poate urma 3 sau 7, dar nu 5 (13 și 17 sunt prime, dar 15 compus), după 5, 7 poate urma 5 sau 7, dar nu 3 (17 și 19 sunt prime, dar 15 compus), după 7, 7 poate urma 3 sau 5, dar nu 7 (17 și 19 sunt prime, dar 21 este compus).	**4p**
În total sunt $3 \cdot 2^{672} + 3^2 \cdot 2^{2014}$ numere.	**1p**